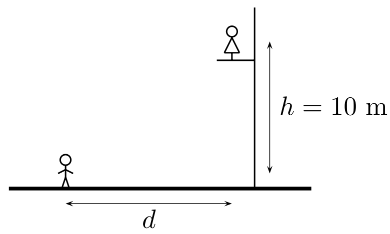
Physique générale I
Mécanique

EXERCICES – Série 1 (06 – 07)

Exercice 1.1
On considère une pierre de masse m à une hauteur h du sol, tombant sous la seule action de la gravitation. Exprimer son temps de chute T et sa vitesse au point d'impact v_{imp} en fonction de m, h et l'accélération g due à la gravitation.

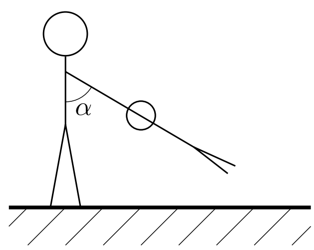
Exercice 1.2
Juliette se trouve sur un balcon situé à 10 mètres au-dessus du sol et jette la clef de sa maison à Roméo placé en-bas, au sol. Le lancé de la clef est effectué avec un angle de 30° sous l'horizontale; Roméo attrape la clef 1,2 secondes plus tard. On suppose que Juliette et Roméo ont la même taille, si bien que la différence de hauteur que subit la clef est de 10 m.



1. Trouver la distance d séparant Roméo du dessous du balcon;
2. Donner les caractéristiques (*i.e.* direction, sens et norme) du vecteur vitesse de la clef au moment où elle atteint la main de Roméo.

Exercice 1.3
Lors d'une compétition de saut en longueur, un athlète fait un saut de 8 m (de long). En estimant que sa vitesse horizontale est de 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, calculer le temps que l'athlète passe dans l'air, la vitesse qu'il se donne dans la direction verticale au moment de la détente, et la hauteur maximale qu'il va atteindre. Négliger tout frottement avec l'air.

Exercice 1.4
Un père amuse son fils en le tenant par les bras et en le faisant tourner autour de lui en rond de telle sorte que l'enfant ne touche plus le sol et qu'il forme un angle α avec la verticale. On suppose que la période de rotation est de 1,5 s ; on considère que l'enfant mesure 1,20 m, que son centre de gravité est à 1,60 m de distance de son père et qu'il pèse 25 kg. Calculer l'angle α ainsi que la force à laquelle le père doit résister dans ce jeu. Négliger tout frottement avec l'air.



Rappel et résumé

Définition 1 On dit qu'un système physique suit un mouvement uniformément accéléré (MUA) si son vecteur accélération (*i.e.* sa norme, sa direction et son sens) est constant au cours de son évolution.

Par exemple, une particule de masse m en chute libre suit un mouvement uniformément accéléré, car elle n'est soumise qu'à la gravitation dont l'accélération est $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Notons que cette accélération est constante uniquement pour de petite différences de hauteur, car dans l'espace, loin de la Terre, elle est évidemment bien moindre.

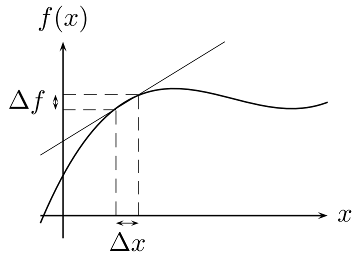
Essayons à présent de trouver l'équation de mouvement la plus générale pour un système physique soumis à une accélération constante. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques définitions mathématiques.

Définition 2 Une fonction $f : E \to F$ $(\subset \mathbb{R})$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *dérivable* en x_0 si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite lorsque x tend vers x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée *dérivée de la fonction f au point x_0* et on la note $f'(x_0)$ ou aussi $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Si on peut obtenir cette limite pour tout un ensemble de points, nous avons alors une nouvelle fonction sur cet ensemble, appelée *fonction dérivée*. L'opération qui, à une fonction $x \to f(x)$, fait correspondre sa dérivée $x \to f'(x)$ est appelée *dérivation* ou *dérivation par rapport à x* (c'est-à-dire par rapport à la variable).

Concrètement, lorsqu'on dérive une fonction f en un point x_0, on considère le point x_0 et un accroissement Δx, on regarde la variation de f due à l'accroissement de x, on quotiente l'accroissement de f par celui de x et finalement on fait tendre Δx vers 0. Lorsque l'accroissement Δx est très petit, infinitésimal, on le note dx et l'accroissement infinitésimal de f correspondant se note df. Nous avons donc :



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\ .$$

Nous voyons donc que la dérivée d'une fonction f en un point x_0 correspond à la pente de la tangente à f en x_0.

Définition 3 Soient un intervalle $[a;\, b]$, $a < b$, et f une fonction continue sur cet intervalle. Une fonction continue $F : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ est appelée *primitive* de la fonction f sur $[a;\, b]$ si, pour tout $x \in\,]a;\, b[$, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = F'(x) = f(x)$.

On vérifie que la fonction primitive F de f peut s'écrire de manière générale $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y$, où x_0 est un nombre dans l'intervalle $]a; b[$.

Dans $\mathbb{R}^3$, l'espace dans lequel nous vivons et nous déplaçons, chaque vecteur peut être représenté par un triplet de nombres, ces nombres étant appelés composantes du vecteur. Ici, nous considérons le vecteur accélération d'un système physique et nous supposons que ce vecteur est constant. Nous avons :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

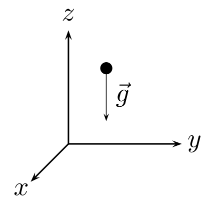
dans un système de coordonnées xyz. Cherchons une primitive de la fonction $t \to \vec{a}$ (qui est une fonction constante). En prenant

$$\vec{v}(t) = \vec{a}\,t + \vec{v}_0\ ,$$

où $\vec{v}_0$ est un vecteur constant, nous voyons que la dérivée $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t)$ de $\vec{v}$ par rapport à t est précisément $\vec{a}$. La primitive de l'accélération est appelée *vitesse* du système physique, car la dérivée de la vitesse est le quotient de l'accroissement (infinitésimal) $\mathrm{d}\vec{v}$ par l'accroissement infinitésimal $\mathrm{d}t$ et ceci correspond bien à la notion d'accélération. $\vec{v}_0$ est appelée *vitesse initiale* ou *vitesse au temps* t_0. Cherchons à présent une primitive du vecteur vitesse; nous prenons

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2 + \vec{v}_0\,t + \vec{r}_0\ ,$$

et nous vérifions sans peine qu'en dérivant $\vec{r}$ par rapport à t (t étant ici la variable et r une fonction de t), nous retrouvons la fonction $\vec{v}$ écrite plus haut. La fonction $\vec{r}$ est appelée *position* du système physique, car sa dérivée est le quotient de l'accroissement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{r}$ par l'accroissement infinitésimal $\mathrm{d}t$ et ceci correspond bien à la notion de vitesse. $\vec{r}_0$ est appelé *position initiale* ou *position au temps* t_0. Cette dernière relation obtenue correspond à l'équation horaire du système physique soumis à une accélération constante.



Une particule de masse m soumise à la gravitation seule est un exemple typique de mouvement uniformément accéléré. Considérons un système de coordonnées orthonormé, positivement orienté, de telle sorte que l'accélération $\vec{g}$ soit selon l'axe z, avec un sens contraire. En composantes, nous avons :

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}\ ,$$

où $g \doteqdot \|\vec{g}\|$ est la norme de $\vec{g}$ ($g \cong 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ sur Terre, au niveau de la mer). Ainsi :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix}\ ,$$

(trouver la primitive d'une fonction vectorielle revient à trouver la primitive de chacune de ses composantes) et finalement :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} .$$

Nous constatons donc qu'une particule en chute libre ne subit un mouvement uniformément accéléré que selon l'axe z, tandis que selon les axes x et y, le mouvement est rectiligne uniforme (*i.e.* sans aucune accélération). Si la particule est lâchée sans aucune vitesse initiale, il n'y aura pas de mouvement selon x et y et la vitesse variera uniquement selon z. Aussi, si la particule est lâchée avec une vitesse initiale non nulle selon x et/ou y, alors cette vitesse sera la même au cours du temps. Ceci permet de conclure que le mouvement d'une particule en chute libre se passe dans un plan vertical, quelle que soit la vitesse initiale. De fait, nous pouvons toujours choisir un système de coordonnées tel que deux des axes soient dans le plan du mouvement (par exemple x et y ou x et z) et que le troisième soit perpendiculaire, ne jouant ainsi aucun rôle; nous sommes alors ramené à un problème à deux dimensions.

Notons encore, comme contre-exemple, qu'un système physique soumis à un mouvement circulaire uniforme (c'est-à-dire qu'il décrit un cercle avec la norme de sa vitesse constante) n'est pas un mouvement uniformément accéléré, car certes la norme du vecteur accélération est constante, mais pas la direction, puisque le vecteur pointe toujours vers le centre du cercle.

*

*   *

Physique générale I
Mécanique

SOLUTIONS – Série 1 (06 – 07)

Exercice 1.1

On considère une pierre de masse m à une hauteur h du sol qui tombe sous la seule action de la gravitation. Elle suit donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré et nous sommes ainsi ramenés à un problème unidimensionnel. Plaçons un axe z vertical orienté vers le haut tel que le point 0 soit au niveau du sol; le vecteur accélération (due à la gravitation) $\vec{g}$ a donc un sens contraire à celui de l'axe z. Disons qu'au temps $t = 0$, la pierre est lâchée; elle passe de la hauteur h (position initiale) à la hauteur 0 (position finale) en un temps T; nous pouvons alors écrire :

$$0 = -\frac{1}{2}\,g\,T^2 + h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{2}\,g\,T^2\ ,$$

d'où :

$$T = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\ .$$

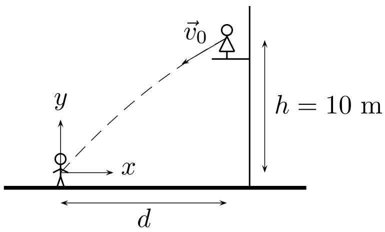
La norme de la vitesse de la pierre au point d'impact est :

$$v_{\text{imp}} = g\,T = \sqrt{2\,g\,h}\ .$$

Nous constatons que T et v_{imp} sont indépendantes de la masse de la pierre.

Exercice 1.2

Sur son balcon, Juliette lance la clef de sa maison à Roméo qui est au sol; elle la lance avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ formant un angle de 30° sous l'horizontale et Roméo la récupère 1,2 secondes plus tard, après qu'elle ait effectué une dénivellation $h = 10$ mètres. Plaçons un système d'axe Oxy sur la main de Roméo, comme indiqué sur la figure. La clef, subissant l'accélération constante $\vec{g}$ due à la gravitation, suit un mouvement uniformément accéléré. Les vecteurs accélération $\vec{g}$ et vitesse initiale $\vec{v}_0$ s'écrivent en composantes :



$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -v_0\,\cos 30° \\ -v_0\,\sin 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\,v_0 \\ -\frac{1}{2}\,v_0 \end{pmatrix}\ ,$$

où v_0 est la norme du vecteur vitesse initiale. L'équation de mouvement de la clef est donc, en supposant qu'elle est jetée au temps $t = 0$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\,v_0 \\ -\frac{1}{2}\,v_0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix}\ ,$$

où h et d correspondent à la position initiale de la clef selon x et y respectivement. Intéressons-nous maintenant à l'instant T où cette clef arrive dans la main de Roméo. Sa position est alors $x = 0$ et $y = 0$. De l'équation pour la composante y, nous obtenons la norme de la vitesse initiale :

$$y = 0 = -\frac{1}{2}\, g\, T^2 - \frac{1}{2}\, v_0\, T + h \qquad \Leftrightarrow \qquad v_0 = \frac{-g\, T^2 + 2\, h}{T} \cong 4{,}89\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \ .$$

1. La distance d séparant Roméo du dessous du balcon s'obtient en injectant l'expression pour v_0 dans l'équation de mouvement pour la composante x :

   $$x = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0\, T + d = -\ \frac{\sqrt{3}}{2}\, (-g\, T^2 + 2\, h) + d\ ,$$

   et nous obtenons :

   $$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\, (-g\, T^2 + 2\, h) \cong 5{,}09\ \ \mathrm{m} \cong 5\, \mathrm{m}\ .$$

2. Une caractérisation complète du vecteur vitesse $\vec{v}_{\mathrm{R}}$ au moment où Roméo réceptionne la clef est donnée, par exemple, en calculant ses composantes selon x et y. Nous avons :

   $$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{R},x} \\ v_{\mathrm{R},y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0 \\ -\frac{1}{2}\, v_0 \end{pmatrix}\ ,$$

   donc :

   $$\begin{aligned} v_{\mathrm{R},x} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{-g\, T^2 + 2\, h}{T} \cong 4{,}23\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ , \\ v_{\mathrm{R},y} &= -\frac{h}{T} \cong 8{,}33\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ . \end{aligned}$$

   Nous voyons que la vitesse de la clef selon x reste constante dans le temps, tandis que la vitesse selon y croît proportionnellement avec le temps. En T, le vecteur vitesse a une norme :

   $$v_{\mathrm{R}} = \frac{1}{T}\, \sqrt{\frac{3}{4}\, g^2\, T^4 - 3\, g\, T^2\, h + 4\, h^2} \cong 9.35\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ ,$$

   et il forme un angle

   $$\alpha = \arcsin\left(\frac{v_{\mathrm{R},y}}{v_{\mathrm{R}}}\right) \cong 63°$$

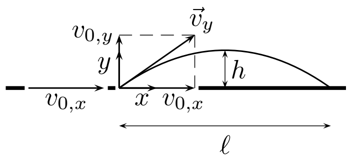
   sous l'horizontale.

Exercice 1.3

Lors d'une compétition de saut en longueur, un athlète fait un saut de 8 m (de long). On suppose que sa vitesse horizontale est de 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Une fois que l'athlète saute, la seule force à laquelle il est soumis est la force de gravitation; le vecteur accélération de la gravitation $\vec{g}$ est vertical et orienté vers le bas. Ainsi, durant tout le saut, il suit un mouvement uniformément accéléré. Considérons un système de coordonnées Oxy tel que l'origine soit au point de détente, comme indiqué sur la figure. En ce point, l'athlète a une vitesse initiale $v_{0,x} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ selon x et une vitesse $v_{0,y}$ selon y. Nous pouvons écrire l'équation horaire de l'athlète, en supposant qu'en $t = 0$, il est au point de détente :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \end{pmatrix} t \quad ;$$

nous remarquons que selon x le mouvement est rectiligne uniforme. Maintenant, nous savons que la longueur du saut est $\ell = 8$ m, ce qui nous permet directement de trouver le temps T que l'athlète passe en l'air; nous avons $\ell = v_{0,x}\,T$, d'où :



$$T = \frac{\ell}{v_{0,x}} = 0{,}8 \text{ s} .$$

Pour trouver la vitesse initiale selon y (*i.e.* la composante verticale de la vitesse au moment de la détente), nous considérons l'équation horaire pour la composante y; au temps T, l'athlète ratterrit au sol et donc sa position selon l'axe vertical est $y = 0$. Ceci nous permet d'écrire $0 = -\frac{1}{2}\,g\,T^2 + v_{0,y}\,T$, d'où :

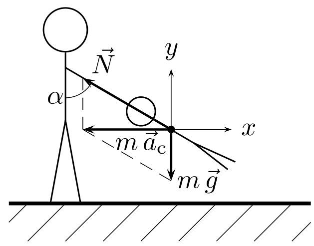
$$v_{0,y} = \frac{1}{2}\,g\,T \cong 3{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} .$$

Finalement, l'athlète atteint sa hauteur maximale, lorsque sa vitesse verticale est nulle. Utilisant cet argument dans l'équation donnant la vitesse selon l'axe y, nous obtenons $v_y = 0 = -g\,\tilde{T} + v_{0,y} \;\Leftrightarrow\; \tilde{T} = \frac{v_{0,y}}{g}$, où $\tilde{T}$ est l'instant où l'athlète a une vitesse verticale nulle, donc aussi lorsqu'il est au point le plus haut. Ainsi, en injectant ce temps $\tilde{T}$ dans l'équation horaire selon y, nous obtenons la hauteur maximale h qu'atteint l'athlète :

$$h = y_{\max} = -\frac{1}{2}\,g\,\tilde{T}^2 + v_{0,y}\,\tilde{T} = \frac{{v_{0,y}}^2}{2\,g} \cong 0{,}78\,\text{m} .$$

Exercice 1.4

Un père amuse son fils en le tenant par les bras et en le faisant tourner autour de lui en rond de telle sorte que l'enfant ne touche plus le sol et qu'il forme un angle α avec la verticale. On suppose que la période de rotation est $T = 1{,}5$ s ; on considère que l'enfant mesure 1,20 m, que la distance séparant son centre de gravité de son père est $R = 1{,}60$ m et que sa masse est $m = 25$ kg. Les seules forces agissant sur l'enfant (en son cen-



tre de gravité) est la force de gravitation $m\,\vec{g}$ et la force $\vec{N}$ qui résulte du fait que son père le retient par les mains. Comme l'enfant tourne, son centre de gravité décrit un cercle horizontal de rayon $R = 1{,}60$ m ; il suit un mouvement circulaire uniforme et subit donc une accélération centrale $\vec{a}_{\text{cent}}$, la seule agissant sur lui. A un instant donné, plaçons un système de coordonnées Oxy immobile, O coïncidant avec le centre de gravité de l'enfant, tel que l'axe y soit vertical et l'axe x soit horizontal, selon la direction de la droite reliant le centre du cercle au centre de gravité, et pointant vers l'extérieur. Écrivons alors l'équation de Newton dans ce cas :

$$m\,\vec{g} + \vec{N} = m\,\vec{a}_{\text{cent}} \ .$$

Décomposons les différents vecteurs selon x et y; nous obtenons :

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \ , \qquad \vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix} \ , \qquad \vec{a}_{\text{cent}} = \begin{pmatrix} -a_{\text{cent}} \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

où g et a_{cent} sont les normes des vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{a}_{\text{cent}}$ respectivement. Ainsi, en composantes, l'équation de Newton devient :

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -a_{\text{cent}} \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} N_x &= -m\,a_{\text{cent}} \\ N_y &= -m\,g \ . \end{aligned}$$

Calculons à présent l'accélération centrale. La norme de la vitesse de l'enfant (de son centre de gravité) qui est constante est $v = \frac{2\pi R}{T}$, donc $a_{\text{cent}} = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cong 28\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Finalement :

$$N = \sqrt{{N_x}^2 + {N_y}^2} = m\sqrt{g^2 + \frac{16\,\pi^4 R^2}{T^4}} \cong 743 \text{ N}$$

et c'est, par principe d'action et de réaction, exactement la norme de la force à laquelle le père doit résister lorsqu'il fait tourner son fils (cette dernière a d'ailleurs la même direction que $\vec{N}$ mais un sens opposé). La tangente de l'angle entre l'enfant et la verticale s'obtient en divisant N_x par N_y; nous obtenons alors :

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{N_x}{N_y}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{4\,\pi^2 R}{g\,T^2}\right) \cong 71^\circ \ .$$

Remarque : Si nous avions considéré un système de coordonnées fixé en tout temps sur le centre de gravité de l'enfant, alors par rapport à ce référentiel, l'enfant aurait été immobile, donc n'aurait subit aucune accélération. Dans ce cas, pour que l'équation de Newton soit satisfaite, il faut alors qu'il y ait une autre force que la force de gravitation et la force $\vec{N}$, de telle sorte que la somme des forces soit nulle. Cette nouvelle force, dite «fictive», est appelée *force centrifuge*; sa norme vaut exactement $m\,a_{\text{cent}}$, sa direction est la même que celle de l'accélération centrale, mais son sens est opposé.